Preparaduría VIII
18/11/2007

1.- Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Graficarlas, determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento y de concavidad y convexidad.

a) $x^3 - 6x + 2$ b) $x^{2/3}(1-x)$ c) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ d) $\dfrac{x^3}{x^4+1}$ e) $\sin^2 x$

2.- Demostrar que, cualquiera sea m, la función $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0,1]$.

3.- Supóngase que f es contínua y derivable en $[0,1]$, que f está en $[0,1]$ para todo x y que $f'(x) \neq 1 \quad \forall x \in [0,1]$. Demostrar que existe *exactamente* un número $\xi \in [0,1]$ tal que $f(\xi) = \xi$.

4.- Demostrar que si f es una función dos veces derivable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''(\xi)| \geq 4$ para algún $\xi \in [0,1]$.

5.- Ex. XLVI [§122 al §125]. Excepto los ejercicios 35, 36, 37 y 38.

6.- Sea P un punto fijo (x_0, y_0) en el primer cuadrante. Hallar la ecuación de la recta tal que el segmento comprendido entre la intersección con los ejes es de longitud mínima.

7.- Una estatua de 5 metros está sobre un pedestal de 3 metros. A qué distancia debe situarse un observador de 2 metros de estatura para que *la estatua* ocupe el máximo ángulo visual a los ojos del observador?

8.- De todos los rectángulos de área dada, hallar: a) el de menor perímetro. b) El que tiene la menor diagonal.

9.- En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ inscribir el rectángulo de mayor área.

10.- Dos lados de un triángulo tienen longitud a y b. Determinar la longitud del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima.

11.- Entre todos los triángulos de base dada y perímetro dado, es el isósceles el de área máxima.

12.-Entre todos los triángulos de base dada y área dada, es el isósceles el que tiene ángulo vertical máximo.

13.- Entre todos los triángulos con área dada, es el equilátero el que tiene menor perímetro.

14.- De todos los triángulos inscritos en una circunferencia, es el equilátero el que tiene mayor área.

15.- El espejo parabólico: dada la parábola $y^2 = 2px,\ p > 0$ y un punto $P(\xi, \eta)$ *dentro* de la parábola (i.e. $\eta^2 < 2p\xi$), hallar el menor recorrido (compuesto por dos segmentos) que va desde P a un punto Q de la parábola y luego al foco [el foco sería $F(\frac{1}{2}p, 0)$, ver el ejercicio 22 de la prepa IV]. Mostrar que el ángulo $\angle FQP$ es bisecado por la normal a la parábola en Q y que QP es paralelo al eje de la parábola.

16.- Dados n números fijos $a_1, a_2, ..., a_n$, determinar x para que $\sum(a_i - x)^2$ sea mínimo.

17.- Dados $a_1 > 0,\ a_2 > 0, ..., a_n > 0$ determinar el mínimo de

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + x}{n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot x}}$$

Utilizar este resultado para demostrar por inducción que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

18.- Ex. XLVII [§126].

19.- Si $\phi(x)$ es un polinomio y λ es real entonces hay una raíz de $\phi'(x) + \lambda\phi(x) = 0$ entre cualquier par de raíces de $\phi(x) = 0$.

20.- Probar que

$$\pi < \frac{\sin \pi x}{x(1-x)} \leq 4$$

Graficar la función en la inecuación.

21.- Si $\phi(x)$ es continua en $a \leq x < b$, $\phi''(x)$ existe y $\phi''(x) > 0$ para $a < x < b$ entonces:

$$\frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a}$$

es estrictamente creciente en $a < x < b$.